数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 48-56

Reproducing kernels related to the complex sphere

佐賀大学文化教育学部　藤田 景子　(Keiko Fujita)

演題は森本光生国際基督教大学教授との共著の論文 [6] の表題であり、この講演ではここ数年来に森本教授との共同研究から得られた結果の概要を述べる。詳細は [6] を参照されたい。

1　要旨

まず、演題の複素球面 $\tilde{S}_\lambda$ とは次式で与えられる複素ユークリッド空間 $\tilde{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{C}^{n+1}$, $n \geq 2$ の代数多様体である。

$$\tilde{S}_\lambda = \{z \in \tilde{\mathbf{E}}; z^2 = z \cdot z = \lambda^2\}, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

ここで、$z \cdot w = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_{n+1} w_{n+1}$ である。$\lambda = 0$ の場合には $\tilde{S}_0$ を複素光錐と呼ぶことにする。$\lambda = r \in \mathbf{R}$ のとき $\tilde{S}_r \cap \mathbf{R}^{n+1}$ は半径 r の実球面 S_r である。S_r 上の実解析関数は半径 r の実閉球

$$B[r] = \{x \in \mathbf{E} \equiv \mathbf{R}^{n+1}; x^2 \leq r^2\}$$

のある近傍上の調和関数に解析接続できる。さらに、$B(r)$ 上の調和関数は半径 r のリー球 $\tilde{B}(r)$ 上の (複素) 調和関数にまで解析接続できる。ここで、リー球とはリーノルム $L(z)$ で測った球

$$\tilde{B}(r) = \{z \in \tilde{\mathbf{E}}; L(z) < r\}, \quad \tilde{B}[r] = \{z \in \tilde{\mathbf{E}}; L(z) \leq r\}$$

のことであり、リー球上の (複素) 調和関数とは次の微分方程式を満たすリー球上で定義された関数のことである:

$$\Delta_z f(z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_{n+1}^2}\right) f(z) = 0.$$

ユークリッドノルムを $\|z\|^2 = z \cdot \bar{z}$ で表したとき、リーノルム $L(z)$ は

$$L(z) = \{\|z\|^2 + (\|z\|^4 - |z^2|^2)^{1/2}\}^{1/2}$$

で与えられる。

$\mathcal{O}(\tilde{B}(r))$ でリー球 $\tilde{B}(r)$ 上の正則関数の空間を表し広義一様収束の位相を与える。固有値 λ^2 に属するラプラス作用素 Δ の固有関数の空間を

$$\mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}(r)) = \{f \in \mathcal{O}(\tilde{B}(r)); \Delta_z f(z) = \lambda^2 f(z)\},$$

$$\mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}[r]) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ r'>r}} \mathrm{ind}\ \mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}(r))$$

で表す。$\mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}(r)), \mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}[r])$ の双対空間を $\mathcal{O}'_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}(r)), \mathcal{O}'_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{B}[r])$ で表す。$\lambda = 0$ のときは、 $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r)), \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r])$ のように書く。

そこでまず第一に、 複素球面の境界 $\tilde{S}_{\lambda,r} = \partial(\tilde{S}_\lambda \cap \tilde{B}(r))$ 上の積分を用いた内積を導入し $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r])$ と $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))$ との間にあるヒルベルト空間 $H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ の構成を考える。第二に、その錐フーリエ像について考えることにする。我々は [9] で $\mathcal{O}'_\Delta(\tilde{B}[r])$ に対する錐フーリエ・ボレル変換

$$\mathcal{F}_0^\Delta\ :\ T \mapsto \mathcal{F}_0^\Delta T(w) = \langle T_z, \exp(z\cdot w)\rangle,\ \ w \in \tilde{S}_0,$$

を考察し次の定理を証明した。

定理 1. 1 錐フーリエ・ボレル変換 $\mathcal{F}_0^\Delta$ は次の線形位相同型を与える。

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \mathcal{F}_0^\Delta\ :\ \mathcal{O}'_\Delta(\tilde{B}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}\,(\tilde{S}_0;(r)),\quad 0 \le r < \infty, \\ &\text{(ii)} \quad \mathcal{F}_0^\Delta\ :\ \mathcal{O}'_\Delta(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}\,(\tilde{S}_0;[r]),\quad 0 < r \le \infty. \end{aligned}$$

ただし、$\mathrm{Exp}(\tilde{S}_0;(r))$ と $\mathrm{Exp}(\tilde{S}_0;[r])$ は双対リーノルム

$$L^*(z) = \sup\{|z\cdot\zeta|; L(\zeta) \le 1\} = \{(\|z\|^2 + |z|^2)/2\}^{1/2}$$

で測った指数型空間で次式で定義される:

$$\mathrm{Exp}(\tilde{S}_0;(r)) = \{f \in \mathcal{O}(\tilde{S}_0);\ {}^\forall r' > r,\ {}^\exists C > 0\ s.t.\ |f(z)| \le C\exp(r'L^*(z))\},$$

$$\mathrm{Exp}(\tilde{S}_0;[r]) = \{f \in \mathcal{O}(\tilde{S}_0);\ {}^\exists r' < r,\ {}^\exists C > 0\ s.t.\ |f(z)| \le C\exp(r'L^*(z))\}.$$

従って、$H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ の錐フーリエ像として現れるヒルベルト空間は、これらの空間 $\mathrm{Exp}(\tilde{S}_0;[r])$ と $\mathrm{Exp}(\tilde{S}_0;(r))$ との間に存在することが分かる。

2 複素球面と調和関数

$\mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})$ で $\tilde{\mathbf{E}}$ 上の k 次同次調和多項式の空間を表す。$\mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})$ の次元は

$$N(k,n) = \frac{(2k+n-1)(k+n-2)!}{k!(n-1)!} = O(k^{n-1})$$

で与えられる。$P_{k,n}(t)$ で $n+1$ 次元 k 次のルジャンドル多項式を表す。$\overline{P_{k,n}(t)} = P_{k,n}(\bar{t})$ で、$P_{k,n}(t)$ の最高次の係数 $\gamma_{k,n}$ は

$$\gamma_{k,n} \equiv \frac{\Gamma(k+(n+1)/2)2^k}{N(k,n)\Gamma((n+1)/2)k!}$$

であることが知られている。

$$\tilde{P}_{k,n}(z,w) = (\sqrt{z^2})^k(\sqrt{w^2})^k P_{k,n}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} \cdot \frac{w}{\sqrt{w^2}}\right)$$

とおくと、$\tilde{P}_{k,n}(z,w)$ は $P_{k,n}(z \cdot w)$ の調和拡張である。$\tilde{P}_{k,n}(z,w)$ は z と w に関して k 次同次調和多項式で $\tilde{P}_{k,n}(z,w) = \tilde{P}_{k,n}(w,z)$, $\Delta_z \tilde{P}_{k,n}(z,w) = \Delta_w \tilde{P}_{k,n}(z,w) = 0$, $\tilde{P}_{k,n}(\bar{z},\bar{w}) = \overline{\tilde{P}_{k,n}(z,w)}$ を満たす。$z^2 = 0$ または $w^2 = 0$ なら $\tilde{P}_{k,n}(z,w) = \gamma_{k,n}(z \cdot w)^k$ である。

リー球上の調和関数は次のように同次調和多項式の和として表される。

定理 2. 1 ([7, Theorem 5.2]) $f \in \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))$ に対して、

$$f_k(z) = N(k,n)\int_{S_1} f(\rho\omega)P_{k,n}(z/\rho,\omega)d\dot{\omega}, \quad 0 < \rho < r,$$

とおく。ただし、$d\dot{\omega}$ は S_1 上の回転群で不変な正規化された測度である。

このとき、$f_k \in \mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})$ であり、$\sum_{k=0}^\infty f_k(z)$ は $f(z)$ に $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))$ の位相で収束する。さらに、$\limsup_{k\to\infty} \|f_k\|_{S_1}^{1/k} \leq 1/r$ である。ここで、$\|\cdot\|_{S_1}$ は S_1 上の L^2 ノルムである。

$$\tilde{S}_\lambda(r) = \{z \in \tilde{S}_\lambda\,;\, L(z) < r\}, \quad \tilde{S}_\lambda[r] = \{z \in \tilde{S}_\lambda\,;\, L(z) \leq r\}$$

とおく。$\tilde{S}_\lambda(\infty) = \tilde{S}_\lambda$ で $\tilde{S}_\lambda[|\lambda|] = \tilde{S}_{\lambda,|\lambda|} = S_\lambda = \lambda S_1$ である。$r \leq |\lambda|$ のとき $\tilde{S}_\lambda(r) = \emptyset$ で、$r < |\lambda|$ のときは $\tilde{S}_\lambda[r] = \emptyset$ となる。

$\mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda(r))$ で $\tilde{S}_\lambda(r)$ 上の広義一様収束の位相をもつ正則関数の空間を表し、

$\mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda[r]) = \liminf_{r'>r}\operatorname{ind} \mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda(r))$ で $\tilde{S}_\lambda[r]$ 上の正則関数芽の空間を表す。

和田 [10] は制限写像が線形位相同型

$$\alpha_\lambda^0 : \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda(r)),\ \ \alpha_\lambda^0 : \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda[r])$$

を与えることを証明した。そこで、リー球上の調和関数に対し複素球面の境界上の積分で内積を与えることを考える。

$$\tilde{S}_{\lambda,r} = \partial\tilde{S}_\lambda(r)$$

とおく。$f, g \in \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r])$ に対して、半双線形形式 $(\cdot,\cdot)_{\tilde{S}_{\lambda,r}}$ を

$$(f,g)_{\tilde{S}_{\lambda,r}} = \int_{\tilde{S}_{\lambda,r}} f(z)\overline{g(z)}\dot{d}z,\ \ |\lambda| \le r$$

で定義する。ただし、$\dot{d}z$ は $\tilde{S}_{\lambda,r}$ 上の回転群で不変な正規化された測度である。

$r > 0$ と $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して、

$$L_{k,\lambda,r} \equiv \begin{cases} |\lambda|^{2k} P_{k,n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{|\lambda|^2} + \frac{|\lambda|^2}{r^2}\right)\right), & \lambda \ne 0, \\ \frac{\gamma_{k,n}}{2^k} r^{2k}, & \lambda = 0 \end{cases}$$

とおく。$L_{k,0,r} = \lim_{\lambda\to 0} L_{k,\lambda,r}$ であることに注意しておく。

[10] より

(1)
$$\int_{\tilde{S}_{\lambda,r}} f_k(z)\overline{g_k(z)}\dot{d}z = L_{k,\lambda,r} \int_{\tilde{S}_1} f_k(x)\overline{g_k(x)}\dot{d}x$$

という関係式が分かっているので、(1) と定理 2.1 より

$$\begin{aligned} (f,g)_{\tilde{S}_{\lambda,r}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tilde{S}_{\lambda,r}} f_k(z)\overline{g_k(z)}d\dot{z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} L_{k,\lambda,r} \int_{S_1} f_k(x)\overline{g_k(x)}d\dot{x} \end{aligned}$$

となり、$(\cdot,\cdot)_{\tilde{S}_{\lambda,r}}$ が $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r])$ 上の内積を与えることは容易に分かる。

3 リー球上の調和関数から成るハーディー空間

内積 $(\cdot,\cdot)_{\tilde{S}_{\lambda,r}}$ に関する $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r])$ の完備化を $H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ で表す。定義より

$$H^2_\lambda(\tilde{B}(r)) = \left\{\{f_k\}; f_k \in \mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}}), \sum_{k=0}^{\infty} L_{k,\lambda,r}\|f_k\|^2_{S_1} < \infty\right\}$$

であり、さらに次の補題が成り立つ。

補題 3.1 $|\lambda|<r$ のとき、$H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ はハーディー空間

$$H^2_\lambda(\tilde{B}(r))=\left\{f\in\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))\,;\ \sup_{|\lambda|\le r'<r}\int_{\tilde{S}_{\lambda,r'}}|f(z)|^2dz<\infty\right\}$$

と位相同型である。

評価式 $|\tilde{P}_{k,n}(z,w)|\le L(z)^kL(w)^k$ と、$|\lambda|\le r$ に対して $\lim_{k\to\infty}(L_{k,\lambda,r})^{1/k}=r^2$ であることから、$L(z)L(w)<r^2$ に対して

$$K_{\lambda,r}(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N(k,n)}{L_{k,\lambda,r}}\tilde{P}_{k,n}(z,\overline{w})$$

の右辺は収束し左辺が定義される。このとき、$\overline{K_{\lambda,r}(z,w)}=K_{\lambda,r}(w,z)$ で $K_{r,r}(z,w)$ は周知のポアッソン核であり $K_{0,r}(z,w)$ の $\tilde{S}_0\times\tilde{\mathbf{E}}$ への制限を [8] では $\tilde{S}_0$ 上のコーシー核と呼んだ:

$$K_{r,r}(z,w)=K_{1,1}(z/r,w/r),\quad K_{1,1}(z,\overline{w})=\frac{1-z^2w^2}{(1+z^2w^2-2z\cdot w)^{(n+1)/2}},$$
$$K_{0,R}(z,w)=K_{0,1}(z/r,w/r),\quad K_{0,1}(z,\overline{w})|_{\tilde{S}_0\times\tilde{\mathbf{E}}}=\frac{1+2z\cdot w}{(1-2z\cdot w)^n}.$$

ヒルベルト空間 $H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ に対して次の定理が成り立つ。

定理 3.2 (i) ヒルベルト空間 $H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ は有限次元のヒルベルト空間 $\mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})$ の直和に分解できる。すなわち、

$$H^2_\lambda(\tilde{B}(r))=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})$$

が成り立つ。

(ii) ポアッソン核 $K_{\lambda,r}(z,w)$ はヒルベルト空間 $H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ の再生核である。すなわち、$f\in H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ は

$$f(z)=(f(w),K_{\lambda,r}(w,z))_{\tilde{S}_{\lambda,r}}\equiv\int_{\tilde{S}_{\lambda,r}}f(w)K_{\lambda,r}(z,w)dw,\quad z\in\tilde{B}(r)$$

と積分表示される。

系 3.3 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r]) & \hookrightarrow & H^2_\lambda(\tilde{B}(r)) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))\\
\downarrow_{\alpha^0_\lambda} & & \downarrow_{\alpha^0_\lambda} & & \downarrow_{\alpha^0_\lambda}\\
\mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda[r]) & \hookrightarrow & H^2(\tilde{S}_\lambda(r)) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda(r)).
\end{array}$$

ここで、

$$H^2(\tilde{S}_\lambda(r)) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\tilde{S}_\lambda(r))\,;\ \sup_{|\lambda|\le r'<r} \int_{\tilde{S}_{\lambda,r'}} |f(z)|^2 \dot{d}z < \infty \right\}$$

である。

補題 3. 4 $L_{k,\lambda,r}$ は $|\lambda|$ の増加関数である。すなわち、$0<|\lambda|<|\mu|<|\gamma|=r,\ k\neq 0$ のとき

$$2^{-k}\gamma_{k,n}r^{2k} = L_{k,0,r} < L_{k,\lambda,r} < L_{k,\mu,r} < L_{k,\gamma,r} = L_{k,r,r} = r^{2k}$$

である。

この補題を用いて次の定理が証明できる。

定理 3. 5 $0<|\lambda|<|\mu|<|\gamma|=r$ のとき、包含関係

$$\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}[r]) \subset H^2_\gamma(\tilde{B}(r)) \subset H^2_\mu(\tilde{B}(r)) \subset H^2_\lambda(\tilde{B}(r)) \subset H^2_0(\tilde{B}(r)) \subset \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))$$

が成り立つ。

4 錐フーリエ変換

$f \in H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ に対して錐フーリエ変換 $\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}$ を

$$\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}\ :\ f \mapsto \mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}f(w) = (\exp(z\cdot w),\ f(z))_{\tilde{S}_{\lambda,r}} = \int_{\tilde{S}_{\lambda,r}} \exp(z\cdot w)\overline{f(z)}\dot{d}z,\quad w\in\tilde{S}_0$$

で定義する。この写像は反線形写像であり、$f=\sum_{k=0}^\infty f_k,\ f_k\in\mathcal{H}^k(\tilde{S}_0)\equiv\mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})|_{\tilde{S}_0}$ に対して

$$\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}f(w) = \sum_{k=0}^\infty \frac{L_{k,\lambda,r}}{N(k,n)k!\gamma_{k,n}}\overline{f_k}(w)$$

となる。ただし、$f_k\in\mathcal{P}^k_\Delta(\tilde{\mathbf{E}})$ に対して $\overline{f_k}(z)=\overline{f_k(\overline{z})}$ とおいた。

錐フーリエ変換 $\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}$ による $H^2_\lambda(\tilde{B}(r))$ の像空間を $\mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r)$ で表したとき、次の定理が成り立つ。

定理 4. 1 (i) 錐フーリエ変換 $\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}\ :H^2_\lambda(\tilde{B}(r))\to\mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r)$ は反線形ユニタリー同型を与える。従って、$\mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r)$ はヒルベルト空間である。
(ii) ヒルベルト空間 $\mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r)$ は有限次元のヒルベルト空間 $\mathcal{H}^k(\tilde{S}_0)$ の直和に分解できる。すなわち、

$$\mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r) = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathcal{H}^k(\tilde{S}_0)$$

が成り立つ。

(iii)

$$E_\lambda(\zeta,\xi)=\int_{\tilde S_{\lambda,r}}\exp(z\cdot\zeta)\overline{\exp(z\cdot\xi)}\dot{d}z$$

はヒルベルト空間$\mathcal{E}^2(\tilde S_0;\lambda,r)$ の再生核である。すなわち、$F\in\mathcal{E}^2(\tilde S_0;\lambda,r)$ を

$$F(w)=\int_{\tilde S_0}F(z)\overline{E_\lambda(z,w)}d\tilde S_{0(\lambda,r)}(z)\equiv\int_0^\infty\int_{\tilde S_{0,1}}F(tz')\overline{E_\lambda(tz',w)}\dot{d}z'\rho_{\lambda,r}(t)dt,$$

と積分表示できる。ただし、 $\rho_{\lambda,r}(t)$ は

$$\int_0^\infty t^{2k}\rho_{\lambda,r}(t)dt=\frac{(N(k,n)k!)^2\gamma_{k,n}2^k}{L_{k,\lambda,r}},\quad k=0,1,2,\cdots$$

を満たす C^∞ 関数である(このような関数の存在は[1] を参照)。

定理 4. 2 $0<|\lambda|<|\mu|<|\gamma|=r$ のとき、包含関係

$$\mathrm{Exp}\,(\tilde S_0;[r])\subset\mathcal{E}^2(\tilde S_0;0,r)\subset\mathcal{E}^2(\tilde S_0;\lambda,r)\subset\mathcal{E}^2(\tilde S_0;\mu,r)\subset\mathcal{E}^2(\tilde S_0;\gamma,r)\subset\mathrm{Exp}\,(\tilde S_0;(r))$$

が成り立つ。

5 フーリエ変換

$\mathcal{O}'(\tilde S_\lambda(r))$, $\mathcal{O}'(\tilde S_\lambda[r])$ で $\mathcal{O}(\tilde S_\lambda(r))$, $\mathcal{O}(\tilde S_\lambda[r])$ の双対空間を表す。$T\in\mathcal{O}'(\tilde S_\lambda[r])$ に対してフーリエ・ボレル変換 $\mathcal{F}_\lambda$ を

$$\mathcal{F}_\lambda\ :\ T\mapsto\mathcal{F}_\lambda T(w)=\langle T_z,\exp(z\cdot w)\rangle,\quad w\in\tilde{\mathbf{E}},$$

で定義する。このとき $\mathcal{F}_\lambda T\in\mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}})$ で次の定理が成り立つ。

定理 5. 1 ([8, Theorem 18], [10, Theorem 3.1]) フーリエ・ボレル変換 $\mathcal{F}_\lambda$ は次の線形位相同型を与える。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\lambda\ &:\ \mathcal{O}'(\tilde S_\lambda[r])\xrightarrow{\sim}\mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};(r)),\quad|\lambda|\le r,\\ \mathcal{F}_\lambda\ &:\ \mathcal{O}'(\tilde S_\lambda(r))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};[r]),\quad|\lambda|<r.\end{aligned}$$

ただし、

$$\mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};(r))=\{f\in\mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}});\ {}^\forall r'>r,\ {}^\exists C>0\ s.t.\ |f(z)|\le C\exp(r'L^*(z))\},$$

$$\mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};[r])=\{f\in\mathcal{O}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}});\ {}^\exists r'<r,\ {}^\exists C>0\ s.t.\ |f(z)|\le C\exp(r'L^*(z))\}$$

である。

制限写像

$$\beta_0^\lambda \ : \ \mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}\,(\tilde{S}_0;(r))$$

が線形位相同型を与える ([10]) ことから、次の可換図式を得る ([5])。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_\Delta(\tilde{B}[r]) & \xrightarrow{\mathcal{F}_0^\Delta} & \mathrm{Exp}\,(\tilde{S}_0;(r)) \\ \uparrow_{(\alpha_\lambda^0)^*} & & \uparrow_{\beta_0^\lambda} \\ \mathcal{O}'(\tilde{S}_\lambda[r]) & \xrightarrow{\mathcal{F}_\lambda} & \mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};(r)). \end{array}$$

$f \in H^2(\tilde{S}_\lambda(r))$ に対してフーリエ変換 $\mathcal{F}_{\lambda,r}$ を

$$\mathcal{F}_{\lambda,r} \ : \ f \mapsto \mathcal{F}_{\lambda,r}f(w) = (\exp(z\cdot w),\, f(z))_{\tilde{S}_{\lambda,r}} = \int_{\tilde{S}_{\lambda,r}} \exp(z\cdot w)\overline{f(z)}dz, \quad w \in \tilde{\mathbf{E}}$$

で定義し、フーリエ変換 $\mathcal{F}_{\lambda,r}$ による $H^2(\tilde{S}_\lambda(r))$ の像を $\mathcal{E}^2_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};r)$ で表す。

次の定理が成り立つ。

定理 5.2 フーリエ変換

$$\mathcal{F}_{\lambda,r} : H^2(\tilde{S}_\lambda(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^2_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};r)$$

は反線形ユニタリー同型を与える。

系 5.3 $|\lambda| < r$ とする。次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Exp}\,(\tilde{S}_0;[r]) & \hookrightarrow & \mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r) & \hookrightarrow & \mathrm{Exp}\,(\tilde{S}_0;(r)) \\ \uparrow_{\beta_0^\lambda} & & \uparrow_{\beta_0^\lambda} & & \uparrow_{\beta_0^\lambda} \\ \mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};[r]) & \hookrightarrow & \mathcal{E}^2_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};r) & \hookrightarrow & \mathrm{Exp}_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};(r)). \end{array}$$

次の可換図式は以上に現れたヒルベルト空間の関係を示している。

$$\begin{array}{ccc} H^2_\lambda(\tilde{B}(r)) & \xrightarrow{\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}} & \mathcal{E}^2(\tilde{S}_0;\lambda,r) \\ \downarrow_{\alpha_\lambda^0} & & \uparrow_{\beta_0^\lambda} \\ H^2(\tilde{S}_\lambda(r)) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\lambda,r}} & \mathcal{E}^2_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};r). \end{array}$$

錐フーリエ変換 $\mathcal{F}^\Delta_{\lambda,r}$ とフーリエ変換 $\mathcal{F}_{\lambda,r}$ の逆変換および、$\mathcal{E}^2_{\Delta-\lambda^2}(\tilde{\mathbf{E}};r)$ の再生核等に関しては [6] に委ねる。[2], [3], [4], および、[5] も参照されたい。

参考文献

[1] Antonio J. Duran, The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions, Proc. AMS 107(1989), 731-741.

[2] K.Fujita, Hilbert spaces related to harmonic functions, Tôhoku Math. J. 48(1996), 149-163.

[3] K.Fujita, Hilbert spaces of eigenfunctions of the Laplacian, to appear in the Proceedings of the First International Congress of the ISAAC, Reproducing Kernels and Their Applications, Kluwer Academic Publishers.

[4] K.Fujita, On some function spaces of eigenfunctions of the Laplacian, Proceedings of the fifth international colloquium on finite or infinite dimensional complex analysis, Peking Univ, 1997, 61-66.

[5] K.Fujita and M.Morimoto, Integral representation for eigenfunctions of the Laplacian, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[6] K.Fujita and M.Morimoto, Reproducing kernels related to the complex sphere, submitted.

[7] M.Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications 11 PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223–250.

[8] M.Morimoto and K.Fujita, Analytic functionals and entire functionals on the complex light cone, Hiroshima Math. J., 25(1995), 493-512.

[9] M.Morimoto and K.Fujita, Conical Fourier-Borel transformation for harmonic functionals on the Lie ball, Generalizations of Complex Analysis and their Applications in Physics, Banach Center Publications 37(1996), 95-113.

[10] R.Wada, Holomorphic functions on the complex sphere, Tokyo J. Math., 11(1988), 205-218.